EINSTEIN, FELIX KLEIN, DAVID HILBERT Y HERMANN WEYL

José Manuel Sánchez Ron

Voy a tratar a continuación de la relación que Albert Einstein mantuvo con tres ilustres matemáticos: Felix Klein, David Hilbert y Hermann Weyl. Naturalmente, cualquiera que conozca el desarrollo de los intereses y contribuciones científicas de Einstein, no se sorprenderá que se llegase a producir semejante relación. Sin embargo, a aquellos no demasiado familiarizados con la biografía científica del gran genio de la ciencia del siglo XX, tal vez sí se sorprendan. ¿No mostró durante mucho tiempo Einstein un cierto, por decirlo de alguna forma, desapego por las matemáticas? Recordemos en este sentido el tan a menudo citado pasaje de sus notas autobiográficas (1949) en dónde señalaba, refiriéndose al Politécnico de Zúrich, dónde estudió: "Allí tuve excelentes profesores (por ejemplo, Hurwitz, Minkowski), de manera que realmente podría haber adquirido una profunda formación matemática. Yo, sin embargo, me pasaba la mayor parte del tiempo trabajando en el laboratorio de física, fascinado por el contacto directo con la experiencia. El resto del tiempo lo dedicaba principalmente a estudiar en casa las obras de Kirchhoff, Helmholtz, Hertz, etc. El que descuidara hasta cierto punto las matemáticas no respondía exclusivamente a que el interés por las ciencias naturales fuese más fuerte que el que sentía por aquéllas, sino también a la siguiente circunstancia singular. Yo veía que la matemática estaba parcelada en numerosas especialidades, cada una de las cuales, por sí sola, podía arrebatarnos el breve lapso de vida que se nos concede, hallándome así en la situación del asno de Buridán, que no podía decidirse por ninguno de los dos montones de heno. Esto obedecía, evidentemente, a que mi intuición en el terreno matemático no era lo bastante fuerte como para discernir con seguridad entre lo básico, lo de importancia fundamental, y toda la demás erudición más o menos dispensable. Pero, aparte de eso, no cabe duda de que mi interés por el estudio de la naturaleza era más fuerte; y en mi época de estudiante no comprendía aún que el acceso a los conocimientos fundamentales y más profundos de la física iba ligado a los métodos matemáticos más sutiles. Es algo que sólo fui entreviendo paulatinamente tras años de trabajo científico independiente".[1]

La geometrización de la gravitación: la teoría de la relatividad general

De hecho, cuando se analizan sus artículos anteriores a 1913 se observa que la matemática que empleaba en ellos –que *necesitaba* emplear– era poco exigente. Todo cambió cuando explotando el principio de equivalencia y utilizando el caso de un disco que gira, llegó hacia 1912 a la conclusión de que la teoría relativista de la gravitación que buscaba debía basarse en un espacio-tiempo cuya geometría dependiese de su contenido energético-material, o, en otras palabras, que la gravitación curva el espacio-tiempo. Sería, en consecuencia, no sólo una variedad métrica sino también una de geometría variable, no prefijada e inmutable como sucedía con todas las teorías físicas conocidas hasta entonces (y después, hasta la fecha). Más aún, el objeto matemático que describía esa geometría debía ser el mismo que el que describiese la fuerza gravitacional. En este sentido, la gravitación se *geometrizaba*; se incluía, subsumía, la gravitación en la geometría. Y como la geometría está definida en todos los puntos del

---

[1] A. Einstein, *Notas autobiográficas* (Alianza Editorial, Madrid 1984), pp. 20-21.

sistema al que hace referencia, la conclusión inevitable era que la nueva teoría relativista de la gravitación tenía que ser una *teoría de campos*.

Einstein necesitaba, por tanto, recurrir a una geometría más compleja y general que la clásica establecida en los *Elementos* de Euclides. Es bien sabido, por supuesto, que esas geometrías fueron desarrolladas a lo largo de la primera mitad del siglo XIX, gracias a los trabajos Gauss, Lobachevskii, Bolyai y Riemann, pero ¿conocía Einstein esa nueva geometría?

Es cierto que el programa de estudios que había seguido en Zúrich incluía un curso sobre geometría dictado por el matemático Carl Friedrich Geiser, en el que se trató de los trabajos de Gauss sobre superficies curvas descritas de forma intrínseca, pero no parece que lo aprovechase demasiado, no, desde luego, como para poder ser matemáticamente autosuficiente en 1912. En cuanto a los trabajos de Riemann o el artículo que los matemáticos italianos Gregorio Ricci-Curbastro y Tullio Levi-Civita publicaron en 1901, que contiene la mayor parte de los elementos de la geometría riemanniana necesarios para la relatividad general, simplemente los desconocía.[2]

La ayuda le llegó de su amigo y compañero de estudios en el Politécnico de Zúrich, Marcel Grossmann, que ya había intervenido decisivamente en su vida años antes, en 1902, cuando el padre de Grossmann logró que la Oficina de Patentes de Berna emplease al entonces desvalido Albert. Cuando en febrero de 1912 Einstein fue nombrado catedrático en su antigua *alma mater*, el Instituto Politécnico de Zúrich, se encontró allí con Grossmann, que ocupaba una cátedra de matemáticas. Fue una coincidencia afortunada, ya que Grossmann se había especializado precisamente en geometría diferencial. Juntos escribieron un artículo que representa un momento decisivo en la carrera de Einstein, así como en la historia de la física. En la carrera de Einstein porque, como veremos, el "estilo einsteniano" cambiaría de una manera radical a partir de entonces. En la historia de la física, porque nadie hasta entonces había hecho lo que sus autores llevaron a cabo en aquel trabajo: "reducir", geometrizar, la gravitación; utilizar un marco geométrico curvo que dependía de su contenido energético-material.

El artículo en cuestión, que la editorial Teubner decidió publicar a finales de 1913 como un folleto de 28 páginas, se titulaba *Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation* (*Esbozo de una teoría general de la relatividad y de una teoría de la gravitación*).[3] Su estructura no dejaba dudas acerca de las diferentes responsabilidades de sus autores: comenzaba con una "Parte física", firmada por Einstein, y continuaba con una "Parte matemática", debida a Grossmann.

Las ecuaciones del campo gravitacional que se proponían en este *Esbozo* no eran correctas y Einstein terminaría por abandonarlas. Comenzó entonces un largo, complejo y con frecuencia oscuro conceptualmente, período –que sólo finalizaría en noviembre de 1915– durante el cual Einstein pugnó por determinar los principios básicos de la teoría relativista de la gravitación que buscaba, incluyendo, claro, las ecuaciones del campo gravitacional. No puedo, naturalmente, detenerme en los detalles de esa búsqueda; para mis propósitos hoy lo realmente importante es señalar que aunque los argumentos físicos no desaparecieron de los razonamientos de Einstein, cada vez iban cobrando más fuerza los puramente matemáticos, con el cálculo tensorial ocupando una posición central. La fascinación que Einstein iba sintiendo por el poder de las matemáticas se

---

[2] Gregorio Ricci y Tullio Levi-Civita, "Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications", *Mathematische Annalen 54*, 125-201 (1901).

[3] A. Einstein y M. Grossmann, *Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation* ("I. Physikalischer teil" por A. Einstein; "II. Mathematischer teil" por M. Grossmann) (Teubner, Leipzig, 1913).

hace patente en el pasaje inicial del artículo que leyó en la sesión plenaria de la Academia Prusiana de Ciencias el 4 de noviembre de 1915, en el que se quedó a un paso de formular la versión final de la teoría de la relatividad general:[4] "Nadie que la haya entendido realmente [la teoría presentada aquí] puede escaparse de su belleza, porque significa el verdadero triunfo del cálculo diferencial absoluto tal y como fundado por Gauss, Riemann, Christoffel, Ricci y Levi-Civita". (Veintiún días después, el 25 de noviembre de 1915, Einstein presentaba a la Academia Prusiana la formulación definitiva de la teoría general de la relatividad; esto es, la formulación que incluía las ecuaciones correctas del campo gravitacional, expresadas, por supuesto, en forma tensorial.)[5]

Un mundo matemático nuevo

Desde el artículo que había escrito con Grossmann en 1913, era evidente que Einstein navegaba por océanos que sólo los matemáticos, *algunos* matemáticos, habría, más apropiadamente, que decir, estaban preparados para surcar. Fueron, efectivamente, matemáticos sobre todo los que se dedicaron (o atrevieron) a investigar el nuevo campo, la relatividad general, abierto por Einstein. De los físicos, pocos se atrevieron, aunque algunos lo hicieron con celeridad y buen hacer, como sucedió con el holandés Hendrik A. Lorentz y el astrónomo, astrofísico y físico teórico británico, además de magnífico matemático (era producto del *Mathematical Tripos* de Cambridge), Arthur Eddington.

Einstein reconoció la dificultad matemática que su nueva teoría podía representar para la mayoría de los físicos, y por ello en la extensa presentación que realizó en 1916 de la relatividad general, escribía en las primeras líneas: "Las herramientas matemáticas que son necesarias para la relatividad general ya estaban a disposición nuestra en el 'cálculo diferencial absoluto', que se basa en la investigación sobre variedades no euclideanas de Ricci y Levi-Civita y que ya ha sido aplicada a problemas de física teórica. En la sección B de este artículo he desarrollado todas las herramientas matemáticas necesarias *–que no puedo suponer que son conocidas por todo físico–* y he intentado hacerlo de la manera más simple y transparente posible, de forma que no sea necesario realizar un estudio especial de la literatura matemática para comprender el presente artículo".[6]

Antes, y en un sentido no muy diferente, había escrito, hacía el 10 de abril de 1915, a su amigo Heinrich Zangger: "La teoría de gravitación todavía no encontrará su camino hacia las cabezas de mis colegas durante bastante tiempo. Solamente *uno*, Levi-Civita de Padua, probablemente haya captado completamente el punto principal, porque está familiarizado con las matemáticas que se utilizan".[7]

Basta, efectivamente, con consultar el tomo de los *Collected Papers of Albert Einstein* que contiene su correspondencia correspondiente a 1915 para comprobar que Tullio Levi-Civita, entonces profesor de Mecánica Racional en la Universidad de Padua, fue uno de sus más frecuentes y más familiarizados con las sutilidades del cálculo tensorial corresponsales. Y también de los primeros en responder a las versiones últimas, así como a la definitiva, de la relatividad general, algo no demasiado

---

[4] A. Einstein, "Zur allgemeinen Relativitätstheorie,", *Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften (Berlin). Sitzungsberichte*, pp. 778-786 (1915), p. 779.

[5] A. Einstein, "Die Feldgleichungen der Gravitation", *Königlich Preussische Akademie der Wissenschafte (Berlin). Sitzungsberichte*, 844-847 (1915).

[6] A. Einstein, "Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie", *Annalen der Physik 49*, 769-822 (1916); p. 769.

[7] *The Collected Papers of Albert Einstein*, vol. 8, Parte A (*The Berlin Years: Correspondence, 1914-1917*), Robert Schulmann, A. J. Kox, Michel Janssen y József Illy, eds. (Princeton University Press, Princeton 1998), p. 117.

sorprendente habida cuenta de que, recordemos, había sido uno de los autores, junto a su maestro, Gregorio Ricci-Curbastro, del ya citado artículo de 1901: "Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications". De hecho, debemos considerar a Levi-Civita como otro de los distinguidos miembros de la escuela italiana en geometría, una escuela a la que pertenecieron matemáticos como Luigi Cremona, Eugenio Beltrami, Corrado Segre, Luigi Bianchi, autor de tres tomos de unas *Lezioni di geometria differenziale* (1902-1909) que ahondaban en la senda abierta por la monumental obra de Gaston Darboux, *Lecons sur la théorie genérale des surfaces* (4 vols; 1887-1896), y, por supuesto, Ricci-Curbastro, el principal responsable de la creación de lo que se vino en denominar "cálculo diferencial absoluto".

El ejemplo de Levi-Civita es significativo, aunque, contemplado desde el conjunto de la matemática, seguramente no demasiado representativo. La aparición de la teoría de la relatividad general influyó profundamente en su producción científica. Pero ahora quiero considerar el caso de otro de los primeros científicos que reaccionaron ante los trabajos de Einstein en este domino: el matemático David Hilbert (1862-1943).

Einstein, Hilbert y la relatividad general

Hilbert es, naturalmente, uno de los grandes de la matemática de todos los tiempos, muy probablemente el más grande de finales del siglo XIX y comienzos del XX (Poincaré sería su gran rival en esta clasificación). Dejó, en efecto, su marca en muy variadas ramas de la matemática: en la teoría de invariantes, teoría algebraica de números, fundamentos de geometría y de la matemática en su conjunto, ecuaciones integrales, principio de Dirichlet, cálculo de variaciones , así como en la física teórica y matemática.

Entre los intereses científicos de Hilbert, la física ocupó, efectivamente, un lugar notable. Uno de esos intereses se centró (hacia 1913) en la teoría del campo electromagnético que Gustav Mie estaba intentando desarrollar por entonces. La característica más llamativa de esa teoría es que pretendía ser capaz de dar cuenta de la materia, de explicarla, en base únicamente al campo electromagnético (la materia sería, desde esta perspectiva, algo así como "concreciones" del campo, zonas de alta densidad de éste). Pues bien, en noviembre de 1915, y en medio de un intenso intercambio epistolar con Einstein (que había dictado un curso de seis conferencias de dos horas cada una en Gotinga entre el 29 de junio y el 7 de julio de 1915, a las que asistieron además de Hilbert, matemáticos como Felix Klein y Emmy Noether), el 20 de noviembre –esto es, cinco días antes que Einstein presentase el artículo en que establecía la formulación final de la relatividad general– Hilbert entregó para su publicación a la Academia de Ciencias de Gotinga un artículo titulado "Die Grundlagen der Physik" ("Los fundamentos de la física").[8] Este artículo apareció publicado el 31 de marzo de 1916, y cuando se lee encontramos que en él aparecen las ecuaciones del campo gravitacional y el requisito de covariancia general que Einstein estableció en su artículo definitivo del 25 de noviembre.

Antes de preguntarnos acerca de lo que significan las fechas mencionadas, es preciso señalar que en su trabajo Hilbert se benefició claramente de sus habilidades matemáticas; en concreto de su dominio de las formulaciones basadas en principios variacionales, así como de su capacidad de comprender algunas de las consecuencias de exigir invariancia bajo una transformación arbitraria de coordenadas. En cuanto a lo que pretendía, era, nada más y nada menos, que formular un principio variacional del que se

---

[8] David Hilbert, "Die Grundlagen der Physik, (Erste Mitteilung)", *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse*, pp. 395-407 (1915).

dedujesen las leyes de la física de la gravitación y del electromagnetismo, éste último entendido a la manera de Mie. En su relatividad general, Einstein, por el contrario, se limitaba a la interacción gravitacional.

Pasando, ahora ya sí, a la cuestión de las fechas, la pregunta que surge inmediatamente es la siguiente: si el artículo de Hilbert contiene las ecuaciones de la relatividad general, en su versión más general, esto es, la que admitía la invariancia general y no sólo (como hizo Einstein durante bastante tiempo) para transformaciones de coordenadas cuyo determinante fuese la unidad, y si este artículo fue entregado por Hilbert cinco días antes que el de Einstein, ¿no debería recaer el mérito del descubrimiento de la versión definitiva de la teoría de la relatividad general en Hilbert, por mucho que se reconozca que fue Einstein quien preparó el escenario principal (espacio-tiempo riemanniano; geometrización de la gravitación)? Más aún: ¿no deberíamos reconocer que el mérito de Hilbert fue incluso superior al de Einstein, ya que el catedrático de Gotinga no sólo geometrizó la gravitación sino también la otra interacción entonces conocida en la física, la electromagnética?

Pero olvidemos la contingente cuestión de los reconocimientos personales, y pensemos en disciplinas. ¿No representaría, al menos en este caso, el logro y prioridad de Hilbert una manifestación de superioridad última de la “vía matemática” en el descubrimiento de las leyes fundamentales de la física? No tendría porque ser así siempre, por supuesto, pero al menos lo habría sido en un caso de especial relevancia, lo que mostraría una posible guía heurística para el futuro.

Pues bien, la respuesta a estas preguntas es que no, y ello por dos motivos. El primero, un tanto menos importante que el segundo, es porque la teoría hilbertiana no era realmente idéntica a la einsteniana: sólo era *formalmente* igual. Las ecuaciones del campo tenían la misma forma matemática que las de la relatividad general, pero, siguiendo el espíritu de la teoría de Mie, que Hilbert imitaba, el tensor de energía-momento (que representa el contenido energético-material del sistema, el responsable de la deformación del espacio-tiempo) que incluía, era de naturaleza puramente electromagnética, lo que no ocurría en la teoría de Einstein.

El segundo motivo es más importante y sorprendente, aunque sólo se ha conocido muy recientemente. Resulta que el contenido de lo que presentó Hilbert a la Academia de Ciencias de Gotinga el 20 de noviembre no coincide con lo que apareció finalmente publicado. Como parte de su investigación en la historia del desarrollo de la relatividad general, en 1997 Leo Corry descubrió los ejemplares de las pruebas de imprenta del artículo del 20 de noviembre, corregidas (el 6 de diciembre) por el propio Hilbert.[9] Y al estudiarlas, comprobó que Hilbert modificó lo que había presentado el 20 de noviembre teniendo en cuenta el contenido del artículo de Einstein del 25 de noviembre.

Ahora lo importante no es si Hilbert plagió o no a Einstein; de hecho, para llegar a una conclusión equilibrada habría que tener en cuenta el estilo de trabajo de Hilbert, un estilo en el que la interacción con otros era importante, aspecto que en más de una ocasión le llevó a apropiarse de contribuciones de otros científicos, aunque seguramente no lo hacía por egoísmo personal, sino porque pensaba que lo importante no son los individuos sino el avance de la ciencia. Pero dejemos, digo, estos aspectos (al fin y al cabo, después de algunas tensiones, ambos, Einstein y Hilbert, continuaron manteniendo una buena relación), y veamos qué se puede decir de Hilbert y Einstein y la relación entre física y matemáticas, sirviéndome para ello de las cartas que el propio Einstein escribió a dos distinguidos científicos.

---

[9] L. Corry, J. Renn y J. Stachel, “Belated decision in the Hilbert-Einstein priority dispute”, *Science 278*, 1270-1273 (1997).

La primera carta la envió el 24 de mayo de 1916 a uno de sus mejores amigos, el físico teórico de la Universidad de Leiden Paul Ehrenfest:[10] "La descripción de Hilbert no me atrae", escribía allí Einstein, "es innecesariamente especializada con respecto a la 'materia', innecesariamente complicada, y no natural (=del tipo Gauss) en su construcción...". La segunda la dirigió al matemático y físico matemático, sobre el que enseguida diré más, Hermann Weyl, el 23 de noviembre de 1916:[11] "La suposición de Hilbert sobre la materia me parece infantil, en el sentido de un niño que no conoce ninguno de los trucos del mundo exterior... En cualquier caso, no se puede aceptar mezclar las sólidas consideraciones que surgen del postulado de la relatividad con tales osadas, infundadas hipótesis relativas a la estructura del electrón o la materia. Admito sin ningún problema que la búsqueda de una hipótesis *adecuada*, o de la función de Hamilton para el diseño estructural del electrón, es una de las tareas teóricas más importantes en la actualidad. Sin embargo, el 'método axiomático' es de poca utilidad ahí".[12]

La referencia al "método axiomático" se debe a que este era el favorecido por Hilbert, que deseaba reducir toda teoría física a una base axiomática. Hay, además, que añadir que, como escribió el 23 de julio de 1916 a Théofile de Donder, catedrático de Física matemática en la Universidad de Bruselas, Einstein admitía: "que, al contrario que la mayoría de nuestros colegas, yo no soy en absoluto de la opinión de que toda teoría debe ser puesta en la forma de un principio variacional". Y la base de la contribución de Hilbert era un principio variacional.

Con tales manifestaciones, Einstein mostraba su recelo ante la aproximación del matemático. No podía aceptar que lo que guiase la búsqueda de las leyes básicas de la física estuviese dominado por la habilidad matemática, que fuese la heurística matemática la que controlase la física. Y, sin embargo, ese estilo sería precisamente el que terminaría dominando su propia investigación.

Hermann Weyl y la búsqueda de una teoría del campo unificado

El dominio de aplicación de la teoría de la relatividad general era la interacción gravitacional, pero la gravitación no es la única fuerza que existe en el universo: en la época en la que Einstein la desarrolló se conocía perfectamente la existencia de otra, la electromagnética, pero todavía no se habían identificado claramente, aunque existiesen indicios de ellas, las interacciones débil y fuerte. Era, por consiguiente, natural que Einstein o algún otro se plantease incluir en el marco de la relatividad general también al electromagnetismo; esto es, geometrizar no sólo la fuerza gravitacional sino también la electromagnética. De hecho, esto es lo que había intentado Hilbert.

Habida cuenta de que esa geometrización se llevaba a cabo utilizando el elemento básico de los espacios de Riemann, el tensor métrico, $g_{aß}$, para describir el campo gravitacional, la pregunta era si sería posible utilizarlo también para incluir al electromagnetismo. Y se encontró que no, que era preciso ir más allá de los espacios de Riemann, generalizarlos.

Sin embargo, no fue Einstein, ni algún otro físico, el que tomó la iniciativa en este programa. Fueron matemáticos, aunque no Hilbert. La historia es, de hecho, demasiado extensa como para poder siquiera resumirla adecuadamente aquí. Simplemente diré que estimulados por la aparición y poder de la teoría de la relatividad general, algunos matemáticos analizaron los fundamentos de la geometría riemanniana. Así, en 1917 Gerhard Hessenberg, catedrático de Matemáticas en la Escuela Técnica de

[10] Citada en *The Collected Papers of Albert Einstein*, vol. 8, Parte A, *op. cit*., p. 288.
[11] Ibíd., p. 366.
[12] Ibíd.., p. 318.

Breslau (Wroclaw, Polonia, en la actualidad), y Tullio Levi-Civita, publicaron sendos artículos en los que señalaban que la formulación natural de una geometría riemanniana era basándose en la noción de transporte paralelo infinitesimal de un vector, algo que también hizo el año siguiente el matemático holandés Jan Arnouldus Schouten. Conociendo estos trabajos, en 1918 Hermann Weyl (1885-1955) resaltó que al transportar paralelamente un vector, el valor de su modulo (su "longitud") depende del camino que se sigue en tal transporte, de manera que para describir un espacio que tomase en cuenta tal propiedad era necesario introducir un nuevo conjunto de funciones; esto es, no bastaba para definirlo con el tensor métrico.

Weyl, uno de los científicos más interesantes de esta historia, un matemático absolutamente permeable a la física y a la filosofía, también formaba parte del grupo de Gotinga: comenzó sus estudios allí en 1904; se doctoró –bajo la dirección de Hilbert– en 1908, convirtiéndose en *privadozent* inmediatamente; permaneció en Gotinga hasta 1913, cuando logró una cátedra en el Politécnico de Zúrich; y regresó a su *alma mater* en 1930, como sucesor de Hilbert, aunque sólo estuvo allí tres años: en 1933 abandonó Alemania por el Instituto de Estudio Avanzado de Princeton.

Para presentar sus ideas geométricas, Weyl escogió un libro titulado: *Raum-Zeit-Materie. Vorlesungen uber allgemeine Relativitätstheorie* (*Espacio-Tiempo-Materia. Conferencias sobre relatividad general*; 1918). Con respecto a la generalización de la geometría riemanniana, Weyl escribía en esta obra:[13] "Inducido por las sólidas inferencias de la teoría de Einstein a examinar de nuevo los fundamentos matemáticos, el presente autor hizo el descubrimiento de que la geometría de Riemann sólo llega a medio camino en lo que se refiere a alcanzar el ideal de una geometría infinitesimal pura. Todavía permanece por erradicar el último elemento de geometría 'a distancia', un residuo de su pasado euclideano. Riemann supone que también es posible comparar las longitudes de dos elementos de línea en puntos *diferentes* del espacio; *en una geometría 'de lo infinitamente próximo' no es permisible utilizar comparaciones a distancia*".

Consecuencia de la generalización geométrica introducida, el nuevo espacio (que muchos llaman en la actualidad "espacios de Weyl") necesitaba para quedar definido el tensor métrico $g_{aß}$, pero también un cuadrivector, f_a. Con estas nuevas cuatro variables, Weyl argumentaba que podía introducir –esto es, "geometrizar– el campo electromagnético.

Cuando Weyl le informó del contenido de sus investigaciones y le envió su libro, Einstein quedó fascinado. "Estoy leyendo con genuino deleite las pruebas de su libro, que voy recibiendo página a página", le escribía a Weyl el 8 de marzo de 1918. "Es como una pieza sinfónica maestra. Cada palabra tiene su relación con el conjunto, y el diseño de la obra es grandioso. ¡Que magnífico método es el desplazamiento infinitesimal de vectores para deducir el tensor de Riemann! Cuán naturalmente surge todo. Y ahora ha dado usted a luz al niño que yo no pude obtener: ¡la construcción de las ecuaciones de Maxwell a partir de los $g_{aß}$!".[14]

Es cierto que Einstein enseguida encontró puntos (consecuencias físicas) con los que estaba en desacuerdo ("H. Weyl", escribía Einstein a Hilbert el 12 de abril de 1918, "ha presentado a la Academia de aquí [la Prusiana de Ciencias] a través mío un artículo altamente interesante, en el que busca comprender la gravitación y el electromagnetismo como un sistema de conceptos geométricamente unificado. Matemáticamente, la cosa es

---

[13] He utilizado la traducción al ingles de la cuarta edición alemana (1922): Hermann Weyl, *Space-Time-Matter* (Dover, Nueva York 1952), p. 102.

[14] Citada en Robert Schulmann, A. J. Kox, Michel Janssen y Jozsef Illy, eds., *The Collected Papers of Albert Einstein*, vol. 8, Parte B (Princeton University Press, Princeton 1998), pp. 669-670.

maravillosa. Pero *físicamente* no lo puedo aceptar"),[15] pero no olvidó la lección que el ejemplo del intento de Weyl implicaba: nuevas matemáticas, generalizaciones de los espacios riemannianos que había utilizado para la relatividad general, podían abrir el camino para resolver el problema que siguiendo a Hilbert y a Weyl él también asumió, encontrar una teoría geométrica unitaria de la gravitación y el electromagnetismo. Una tarea, por cierto, a la que también se unió pronto Arthur Eddington, que en 1921 profundizó en la línea abierta por Weyl, y cuyas ideas influyeron bastante en Einstein.[16]

Felix Klein, la relatividad y el Programa de Erlangen

Durante los años a los que estoy refiriéndome, los primeros después de que Einstein completase la teoría de la relatividad general, las interacciones entre matemáticas, matemáticos y relatividad general no hacían sino crecer. Felix Klein (1849-1925), el patriarca de Gotinga, el mismo lugar en donde trabajaba Hilbert y dónde, recordemos, había estudiado Weyl, estaba entusiasmado por cómo la teoría de la gravitación einsteniana (y también, de hecho, la teoría especial) resonaba con su célebre "Programa de Erlangen", la tesis que, influida por los trabajos sobre la teoría de grupos continuos de Sophus Lie (1842-1899), planteó en la lección inaugural que pronunció al tomar posesión en 1872 de la cátedra que había obtenido en la Universidad de Erlangen.[17] "Consideraciones comparativas sobre las investigaciones geométricas modernas", se titulaba la disertación de Klein. La geometría, vino a decir entonces Klein, no es sino el estudio de los invariantes de un grupo de transformaciones.

Leyendo el texto de su conferencia, es algo más difícil de extraer esta idea, pero no demasiado, como se puede comprobar en las siguientes líneas:[18] "Existen transformaciones del espacio que no alteran en nada las propiedades geométricas de las figuras. Por naturaleza, estas propiedades son, en efecto, independientes de la posición que ocupa en el espacio la figura considerada, de su tamaño absoluto, y, en definitiva, también del sentido en el que se disponen sus partes. Los desplazamientos del espacio, sus transformaciones de semejanza y las de simetría no modifican las propiedades de las figuras, no más que las transformaciones compuestas con las precedentes. Llamaremos *grupo principal* de transformaciones del espacio al conjunto de todas estas transformaciones; *las propiedades geométricas no son modificadas por las transformaciones del grupo principal*. El recíproco es igualmente cierto: *las propiedades geométricas están caracterizadas por su invariancia con respecto a las transformaciones del grupo principal*".

Visto desde nuestra perspectiva, acostumbrados como estamos a utilizar la teoría de grupos, o, al menos, a reconocer su importancia tanto para la matemática como para la física, la mención de "grupo principal" que aparece en la cita que utilizado puede pasar desapercibida. Sin embargo, no debería ser así. La teoría de grupos, en efecto, desempeñó un papel central tanto en la génesis como en el contenido del programa de Erlangen. Más concretamente, fue la influencia que ejerció en Klein Sophus Lie, que por entonces estaba construyendo su teoría de grupos continuos. Es importante, en este sentido, recordar lo que Klein escribió en el prefacio que añadió al primer volumen de

---

[15] Citada en *The Collected Papers of Albert Einstein*, vol. 8, Parte B, *op. cit*., p. p. 716.

[16] Arthur S. Eddington, "A generalization of Weyl's theory of the electro-magnetic and gravitational fields", *Proceedings of the Royal Society* A*99*, 104-122 (1921).

[17] Felix Klein, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* (A. Deichert, Erlangen 1872).

[18] Utilizo la traducción al francés: Felix Klein, *Le Programme d'Erlangen* (Gauthier-Villars, París 1974), reeditada por Éditions Jacques Gabay (París 1991), pp. 6-7.

sus "Trabajos matemáticos completos":[19] "El programa de Erlangen fue compuesto en octubre de 1872. Dos circunstancias son relevantes. La primera, que Lie me visitó durante dos meses, a partir del 1 de septiembre. Mantuve discusiones diarias con Lie, que me acompañó el 1 de octubre a Erlangen, sobre su nueva teoría de las ecuaciones en derivadas parciales de primer orden (editadas por mí y publicadas en el *Gött. Nachr.* Del 30 de octubre). La segunda, que Lie se sumó ansiosamente a mi idea de clasificar las diferentes aproximaciones a la geometría utilizando como base la teoría de grupos".

De acuerdo con el programa kleiniano, existen tantas geometrías como grupos de transformaciones, una perspectiva que permitía ver a la relatividad especial como una geometría lorentziana, y a la general como la geometría del grupo de transformaciones generales.

Hubo, por supuesto, que esperar más de treinta años –una vez que Einstein formuló en 1905 la teoría especial de la relatividad, y más aún una década después, cuando completó la teoría general– para que se pudiese pensar en semejante posibilidad. De hecho, por entonces Klein era una persona y un científico diferente. Catedrático en Gotiga desde 1886, y agotada en su mayor parte su capacidad creativa en matemáticas en buena medida como consecuencia de la intensa competición que mantuvo con Poincaré, Klein se dedicó cada vez más a la organización y promoción de la matemática. Ahora bien, para lograr semejante propósito era necesario acercarse a las restantes ciencias y técnicas, a la física y a la ingeniería en particular. Ambas, ciencia-técnica y matemáticas, ganarían de esta manera. Consecuentemente, no sólo diversificó las asignaturas que enseñó, dando con frecuencia cursos sobre mecánica, teoría del potencial y otros temas en la frontera entre matemáticas y física, sino que promovió como pudo la creación en Gotinga de nuevos centros en los que la matemática aplicada desempeñase un papel destacado; centros como el que centrado en aerodinámica dirigiría Ludwig Prandtl a partir de 1904. Otra manifestación de su pluridisciplinar aproximación a la matemática fue la célebre *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, en la que participaron tanto físicos de todas las especialidades junto a matemáticos puros y aplicados.

A la vista de semejante personalidad e intereses, ¿sorprenderá a alguien que Klein se interesase por las teorías relativistas de Einstein?

Aunque sin duda Einstein y Klein se habían conocido y mantenido algún tipo de relación antes, la primera carta que ha sobrevivido de entre las que se intercambiaron data del 26 de marzo de 1917, y la escribió Einstein en respuesta a una, aparentemente perdida, de Klein, en la que éste le llamaba la atención a sus propias investigaciones de 1871 sobre la geometría no euclidea, y en particular al hecho de que además de la geometría esférica existe otra geometría con curvatura constante positiva, la geometría elíptica. El comentario de Klein se produjo tras haber leído el artículo de 1917 en el que Einstein creó la cosmología moderna (relativista) encontrando, tras haber modificado sus ecuaciones originales de la relatividad general introduciendo una constante, la conocida como "constante cosmológica", que las nuevas ecuaciones permitían la existencia de un universo espacialmente finito, o cerrado (con respecto a las coordenadas espaciales) con una distribución uniforme de materia, un, como Einstein lo definía, "espacio esférico" de radio R y volumen $2p^2R^3$.[20] En su respuesta Einstein

---

[19] F. Klein, *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, vol. 1 (Springer, Berlín 1921), pp. 411-416. Citado en Garrett Birkhoff y M. K. Bennet, "Felix Klein and his 'Erlangen Programm'", en William Aspray y Philip Kitcher, eds., *History and Philosophy of Modern Mathematics* (University of Minnesota Press, Minneapolis 1988), pp. 145-176; p. 150.

[20] A. Einstein, "Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätastheorie", *Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften* (Berlín). *Sitzungsberichte* (1917); pp. 142-152.

manifestaba que “es realmente sorprendente que puntos de partida tan diferentes como la matemática y la física den ocasión para establecer al final las mismas estructuras mentales. He leído con placer las partes marcadas en sus artículos; las otras seguirán. Como nunca he hecho geometría no euclideana, se me habían pasado las geometrías elípticas más obvias cuando estaba escribiendo mi artículo”[21] Varios meses después, el 15 de diciembre (1917) y tras haberle escrito al menos otra carta más, Einstein escribía a Klein (de nuevo no disponemos de la misiva de éste): “Me parece que usted sobreestima demasiado el valor de los enfoques puramente formales. Estos son ciertamente valiosos cuando se trata de formular definitivamente una verdad ya establecida, pero casi siempre fallan como una herramienta heurística”.[22] Es cierto que este comentario surgió a propósito de la discusión del posible significado de la covariancia de las ecuaciones de Maxwell bajo una cierta transformación (Einstein estaba convencido de que esa covariancia “no tenía ningún significado profundo”), pero la traslación a otros casos –como la significación que el programa de Erlangen podría tener para la física relativista– es obvia. Klein debió percibir claramente que Einstein le consideraba como un matemático que trataba de dar a su disciplina, la matemática, más importancia de la debida en el descubrimiento de las leyes que rigen la naturaleza, al menos tal es lo que sugiere unas líneas que Klein escribió en el borrador de una carta que envió a Einstein el 20 de marzo de 1918 (no incluye esas líneas en la versión final):[23] “no debe considerarme como un matemático inclinado exclusivamente hacia el formalismo, sino más bien como un hombre que en el desarrollo de su vida se vio conducido por casualidad al lado de la matemática y que ahora está intentando demostrar el conocimiento que ha obtenido allí también con respecto a su importancia para disciplinas vecinas”

Confiado en sus habilidades, Klein se lanzó a investigar la relatividad general, inundando a Einstein con numerosas y frecuentemente extensas cartas. A mencionar también que Klein y Hilbert fueron decisivos en que Emmy Noether (1882-1935), la extraordinaria matemática que pugnaba (a la postre vanamente) por abrirse camino en el machista mundo universitario germano, abandonase durante un tiempo sus investigaciones en invariantes algebraicos dedicándose a estudiar las relaciones en principios variacionales entre simetrías (o invariancias) y leyes de conservación, con el propósito último de elucidar el papel de las denominadas “identidades de Bianchi” en las ecuaciones del campo de la relatividad general. En 1918, Noether resolvió el problema, publicando un artículo que contiene los que se denominan “teoremas de Noether”, unos instrumentos matemáticos esplendorosos no sólo (ni siquiera principalmente) para la relatividad general sino para el conjunto de la física teórica.[24] Einstein, por cierto, recibió con entusiasmo estos trabajos de Noether; en este sentido, escribía a Hilbert el 24 de mayo de 1918:[25] “Ayer recibí un artículo muy interesante de la Srta. Noether sobre la generación de invariantes. Me impresiona que estas cosas puedan ser tratadas desde un punto de vista tan general”. Y añadía: “No habría hecho

---

[21] A. Einstein a F. Klein, 26 de marzo de 1917, reproducida *The Collected Papers of Albert Einstein*, vol. 8, Parte A, *op. cit*., p. 415.

[22] Ibíd., p. 569.

[23] *The Collected Papers of Albert Einstein*, vol. 8, Parte B, *op. cit*, p. 685-690; p. 690.

[24] Emmy Noether, “Invarianten beliebiger Differentialausdrücke”, *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, pp. 37-44 (1918); “Invariante Variationsprobleme”, *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, pp. 235-257 (1918). Emmy Noether falleció en 1935, como consecuencia de una operación nada complicada a la que fue sometida en Estados Unidos, a donde tuvo que emigrar en 1933 por su condición de judía.

[25] *The Collected Papers of Albert Einstein*, vol. 8, Parte B, *op. cit*., p. 774.

daño a la vieja guardia de Gotinga que se la hubiese enviado a la Srta. Noether para que esta les diese clase". Unos meses más tarde, el 27 de diciembre, tras recibir el segundo de los artículos de Noether, repetía su admiración por ella, que como mujer era rechazada por los claustros universitarios, en una carta a Felix Klein:[26] "Lo que me incita a escribirle hoy es un asunto diferente. Al recibir el nuevo artículo de la Srta. Noether, de nuevo he sentido la gran injusticia que es el que le sea negada la *venia legendi*. Yo apoyaría mucho el tomar medidas de presión en el Ministerio."

[26] Ibíd., p. 976.